Model lucrare 1 - Algebră liniară 2026

1. (1of)

   (a) (2p) Definiți noțiunea de bază într-un spațiu liniar finit generat. Dați un exemplu de bază necanonică în spaîiul liniar real $\mathbb{R}^2$. Motivați de ce aceasta este bază.

   (b) (3p) Dacă V_1, V_2 sunt subspații liniare ale unui K spațiu liniar V, definiți $V_1 \oplus V_2$ și demonstrați că suma $V_1 + V_2$ este directă dacă și numai dacă $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$.

   (c) (4p) Următoarele sisteme de vectori sunt baze în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Scrieți matricea de trecere de la $\mathcal{B}_1$ la $\mathcal{B}_2$ și determinați coordonatele lui $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ în raport cu baza $\mathcal{B}_2$, unde

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathcal{B}_2 &= \left\{ F_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

2. (10p) În $\mathbb{R}^3$ se consideră $V_1 = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3]$, subspațiul liniar generat de vectorii $\bar{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\bar{a}_2 = (-1, 1, 0)$, $\bar{a}_3 = (0, 3, 3)$ și V_2 subspațiul liniar al soluțiilor sistemului

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0. \end{cases}$$

   Determinați câte o bază în $V_1, V_2, V_1 + V_2$ și $V_1 \cap V_2$. Este suma $V_1 + V_2$ directă?

   Timp de lucru: 50 min

   Nota finală este media aritmetică a notelor primite pe cele 2 subiecte.